Die Kreise des Apollonios (Handout)

Tom Reinisch

23.05.2024

1 Geschichte

- Das Problem wurde um 200 v. Chr. von Apollonios von Perge konstruiert
- Seine Werke sind verloren gegangen, doch es existiert ein Artikel von Pappus von Alexandria aus dem 4. Jahrhundert.
- Die erste Lösungsmethode wurde von Adriaan van Roomen im Jahr 1596 entwickelt.
- Wenig später löste sein Freund François Viète das Problem mit nur Zirkel und Lineal.

2 10 Fälle

- Das genaue Problem: Kreise konstruieren die zu drei Objekten, welche entweder ein Punkt (P), eine Gerade (L), ein Kreis (C), oder eine Kombination aus diesen sind.
- 10 unterschiedliche Kombinationen

Kombination	**Anzahl der Lösungen**
PPP	1
LPP	2
LLP	2
CPP	2
LLL	4
CLP	4
CCP	4
CLL	8
CCL	8
CCC	8

3 Lösungsmöglichkeiten

3.1 Hyperbeln

- 1596 von Adriaan van Roomen entwickelt
- Es geht darum alle Mittelpunkte von Kreisen zu finden die zwei Kreise berühren.
- Diese Punkte liegen auf Hyperbeln.
- Diese Hyperbeln muss man nun für alle drei Kreispaare generieren und dann die Punkte finden, wo alle drei Paare einen Mittelpunkt eines Berührungskreises haben.

3.2 Mit Zirkel und Lineal

- Wurde von François Viète entwickelt
- Er löste erst die einfachen Fälle und simplifizierte dann die komplexeren Fälle
- Kreis $\rightarrow$ Punkt
- LLC $\rightarrow$ LLP
- CCC $\rightarrow$ PCC

3.3 Algebraische Lösung

$$(x_s - x_1)^2 + (y_s - y_1)^2 = (r_s - s_1 r_1)^2$$
$$(x_s - x_2)^2 + (y_s - y_2)^2 = (r_s - s_2 r_2)^2$$
$$(x_s - x_3)^2 + (y_s - y_3)^2 = (r_s - s_3 r_3)^2$$

$$x_1 = 0.6, y_1 = 0.2, r_1 = 0.08$$
$$x_2 = 0.3, y_2 = 0.5, r_2 = 0.17$$
$$x_3 = 0.7, y_3 = 0.5, r_3 = 0.13$$

$$(x_s - 0.6)^2 + (y_s - 0.2)^2 = (r_s + 0.08)^2$$
$$(x_s - 0.3)^2 + (y_s - 0.5)^2 = (r_s + 0.17)^2$$
$$(x_s - 0.7)^2 + (y_s - 0.5)^2 = (r_s + 0.13)^2$$

$$(2 - 1)$$
$$0.6x_s - 0.6y_s - 0.06 = 0.18r_s + 0.0225$$
$$(3 - 1)$$
$$-0.2x_s - 0.6y_s + 0.34 = 0.1r_s + 0.0105$$

$$x_s = 0.3r + y + 0.1375$$
$$y_s = -\frac{1}{6}r - \frac{1}{3}x + 0.5491666667$$

$$x_s = 0.1r_s + 0.515$$
$$y_s = -0.2r_s + 0.3775$$

$$
\begin{aligned}
0.05r_s^2 - 0.08799999998r_s + 0.03873125 &= r_s^2 + 0.16r_s + 0.0064 \\
&\rightarrow r_s = -0.3565130717078 \lor r_s = 0.09546044012499
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_s &= 0.1 \cdot 0.09546044012499 + 0.515 \\
x_s &= 0.5245460440125
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_s &= -0.2 \cdot 0.09546044012499 + 0.3775 \\
y_s &= 0.35840791197
\end{aligned}
$$

4 3D Erweiterung

- Kreis $\rightarrow$ Kugel
- Kugeln finden, die vier Objekte berühren, welche entweder ein Punkt, eine Gerade, eine Ebene, oder eine Kugel sind.

4.1 Fall: PPPP

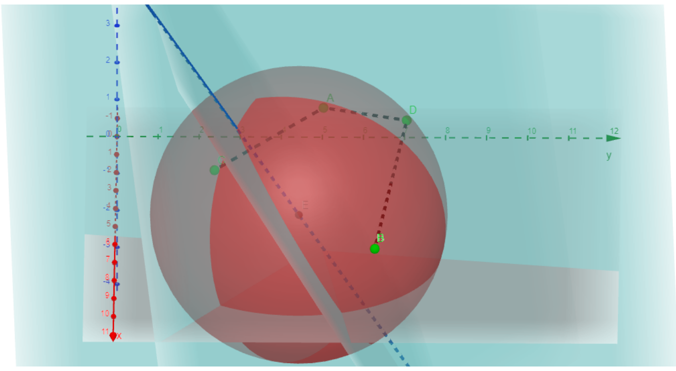

Abbildung 1: Eine Kugel durch 4 Punkte

4.2 Fall: PPPS

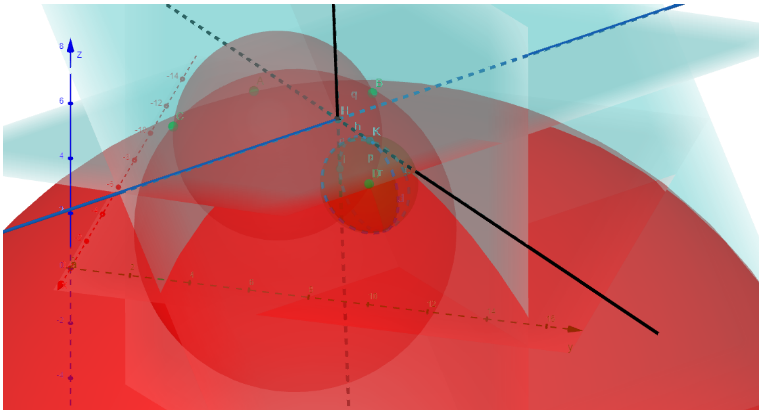

Abbildung 2: Fall PPPS

4.3 Fazit:

- Mittelsenkrechten → Halbierungsebenen
- Die Lösungen unterscheiden sich nicht mehr zwingend darin, ob sie die Ausgangskugel in sich einschließen oder nicht.

4.4 Anzahl der Lösungsmöglichkeiten für mehrere Dimensionen

- 2D → 1 3 3 1
- 3D → 1 4 6 4 1

=> Pascalsches Dreieck
Formel für Anzahl an Lösungsmöglichkeiten: $A(x) = 2^x + 1$