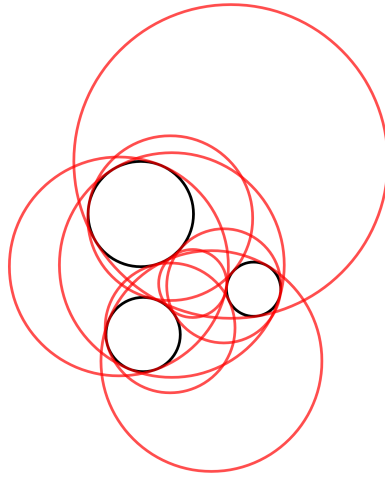




Die Kreise des Apollonios

von: **Tom Reinisch**

Ausgabedatum:
16.02.2024

Abgabedatum:
15.04.2024

Seminarfach:
Mathe (sf9)

Betreuer:
Prof. Dr. Paul Breiding

Lehrer:
Kai Schwegmann

Schule: Gymnasium Ursulaschule
Kurs: Seminarfach Mathe (sf9)

Name des Schülers: Tom Reinisch

Thema: Die Kreise des Apollonios

Kursleiter: Kai Schwegmann

Ausgabetermin des Themas: 16.02.2024

Abgabetermin der Arbeit: 15.04.2024

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	2
0 Info	3
1 Einleitung	3
2 Geschichte	4
3 Die verschiedenen Fälle	4
3.1 Fall: PPP	4
3.2 Fall: PPC	7
3.3 Fall: PCC	10
4 Lösungsansätze	13
4.1 François Viète	13
4.2 Lösung mit Hyperbeln	16
4.3 Algebraische Lösung	18
5 Erweiterung in die dritte Dimension	20
5.1 Fall: PPPS	21
5.2 Algebraische Lösung	23
5.3 Lösungsmöglichkeiten	23
6 Schluss	24
7 Anhang	25
Literatur	29

Abbildungsverzeichnis

1	Beispiel von drei Kreisen in einem Raum mit einem Berührungskreis	3
2	3 Punkte auf einer Ebene	5
3	Fall PPP: Schritt 1	6
4	Fall PPP: Schritt 2	6
5	Fall PPP: Schritt 3	7
6	Fall PPC: Ausgangsobjekte	8
7	Fall PPC: Stufe 1	8
8	Fall PPC: Stufe 2	9
9	Fall PPC: Stufe 3	9
10	Fall PPC: Stufe 4	10
11	Fall PCC: Ausgangsobjekte	11
12	Fall PCC: Stufe 1	11
13	Fall PCC: Stufe 2	12
14	Fall PCC: Stufe 3	12
15	Der Fall LLC als LLP simplifiziert ($r_1 = 0$)	14
16	LLC mit Kreis ($r > 0$)	14
17	CCC $\Rightarrow$ CCP ($r_2 = 0$)	15
18	Der generelle Fall: CCC ($r_2 > 0$)	15
19	Beide Kreise wurden um r_e erweitert und am Schnittpunkt der neuen Kreise wurde ein Kreis mit dem Radius r_e eingezeichnet.	16
20	Ein Kreis wird außen berührt und ein Kreis wird innen berührt	17
21	Tada: Hyperbeln	17
22	Hyperbeln zum CCC Fall	18
23	Lösungen zum CCC Fall	18
24	Lösungskreis CCC	20
25	Eine Kugel durch 4 Punkte	21
26	Eine Kugel und 3 Punkte	21
27	Fall PPS: Stufe 1	22
28	Fall PPS: Stufe 2	22
29	Fall PPS: Stufe 3	22
30	Fall PPS: Stufe 4	23
31	Fall PPS: Stufe 5	23
32	Fall PPP per Hand	26
33	Fall PPL per Hand	27
34	Fall PPC per Hand	28

Alle Abbildungen wurden mit GeoGebra, oder Mathplotlib (python) erstellt.

0 Info

Fast alle Abbildungen in dieser Facharbeit habe ich mit Geogebra erstellt. Alle Dateien dazu sind auf meiner Webseite zu finden (<http://tom.reinisch.net/apollonios>). Ich habe versucht, sie so interaktiv wie möglich zu machen.

1 Einleitung

Man stelle sich drei von einander unabhängige Kreise vor, die sich alle auf einer Ebene befinden. Mehr braucht es nicht, um eines der berühmtesten Probleme der Geometrie zu konstruieren: Die Kreise des Apollonios. Anhand dieser Kreise kann man weitere Kreise konstruieren, die jeden Kreis einmal berühren, also tangential zu den anderen Kreisen stehen. Jetzt stellt sich natürlich die Frage, wie viele Kreise man konstruieren kann, die dieses Kriterium erfüllen. Überlegen Sie doch mal selber, man kann drauf kommen! Die Lösung kommt später.

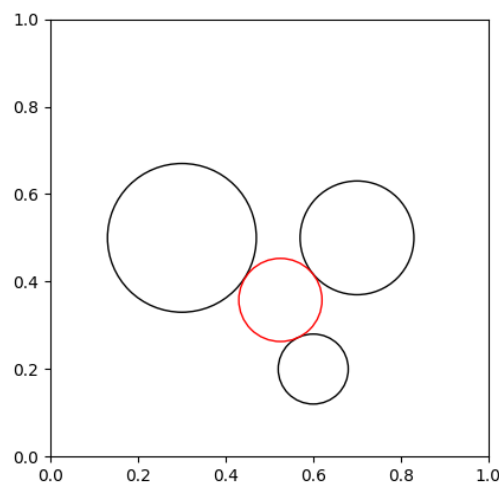


Abbildung 1: Beispiel von drei Kreisen in einem Raum mit einem Berührungskreis

Um diese Frage zu lösen kann man sich überlegen, wo die Kreise die Ausgangskreise berühren. Es gibt zwei Möglichkeiten, wie ein Kreis tangential zu einem anderen Kreis stehen kann. Entweder der neue Kreis schließt den anderen Kreis in sich ein oder nicht. Er berührt ihn also außen. Jetzt muss man nur noch zählen, wie viele Möglichkeiten es gibt, die Kreise einzuschließen.

Es gibt einen Kreis, wo alle Kreise eingeschlossen werden, einen Kreis, wo kein Kreis eingeschlossen wird, drei Kreise wo jeweils ein Kreis eingeschlossen wird und drei Kreise wo jeweils zwei Kreise eingeschlossen werden. Daraus folgt: $1 + 1 + 3 + 3 = 8$. Es gibt also acht verschiedene Kreise, die das oben genannte Kriterium erfüllen.

2 Geschichte

Um 200 vor Christus konstruierte Apollonios von Perge dieses Problem, welches er in seinem Buch „Über Berührungen“ beschrieb. Leider sind seine Werke verloren gegangen. Es existiert lediglich ein Artikel von Pappus von Alexandria aus dem 4. Jahrhundert.

Die erste Lösung zu diesem Problem wurde von Adriaan van Roomen im Jahr 1596 entwickelt, doch diese Lösung hat nicht eindeutig geklärt, ob die Kreise des Apollonios ein Problem der Euclidischen Geometrie sind. Denn um das zu werden, müssen sie nur mithilfe eines unmarkierten Lineals und einem Zirkel konstruierbar sein, was van Roomen nicht bewies. Eine solche Lösung wurde etwas später aber von seinem Freund François Viète konstruiert. Seitdem wurden viele verschiedene Lösungen entwickelt, sowohl geometrisch, als auch algebraisch.[1]

3 Die verschiedenen Fälle

Das Problem von Apollonios besteht jedoch nicht nur aus den drei voneinander unabhängigen Kreisen. Es gibt viele verschiedene Fälle, da die drei Objekte nicht ausschließlich Kreise sein müssen. Es kann eine Kombination aus einem Punkt (P), einer Linie (L) und einem Kreis (C) sein. Aus diesen drei Objekten lassen sich dann 10 verschiedene Probleme mit unterschiedlich vielen Lösungen konstruieren. Die einzelnen Probleme werden mithilfe einer dreistelligen Buchstabenkombination beschrieben. Jeder Buchstabe steht für ein Objekt, aus dem das Problem konstruiert wird. Die Buchstabenkombination „CCC“ steht für das klassische Problem mit drei Kreisen und „PPP“ steht für die einfachste Variation, mit lediglich drei Punkten, wozu es nur eine Lösung gibt. Die Reihenfolge der Buchstaben ist dabei egal, da dabei die genaue Position der Objekte keine Rolle spielt (Es gibt jedoch Positionen, wo einige Lösungen nicht mehr Möglich sind). Deswegen gibt es nur 10 verschiedene Möglichkeiten und nicht 27 ($3 \cdot 3 \cdot 3$). [1]

Kombination	Anzahl der Lösungen
PPP	1
LPP	2
LLP	2
CPP	2
LLL	4
CLP	4
CCP	4
CLL	8
CCL	8
CCC	8

Die Anzahl an Lösungen kann jedoch auch variieren, je nach dem wie die Objekte zueinander stehen. Wenn sie überlappen sind ein paar Lösungen nicht mehr möglich, während es bei manchen Konfigurationen unendlich viele Lösungen gibt. Zum Beispiel wenn alle Objekte tangential zu dem selben Punkt sind.

3.1 Fall: PPP

Um die Mathematik hinter dem Problem zu verstehen und vielleicht auf mögliche Lösungsmöglichkeiten zu kommen, hilft es sich den einfachsten Fall zuerst anzuschauen

Der einfachste Fall lässt sich entweder algebraisch mit dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned}(x_s - x_1)^2 + (y_s - y_1)^2 &= r^2 \\(x_s - x_2)^2 + (y_s - y_2)^2 &= r^2 \\(x_s - x_3)^2 + (y_s - y_3)^2 &= r^2\end{aligned}$$

berechnen, wo x_n & y_n für die Koordinaten der drei Punkte stehen. Aus diesem Gleichungssystem lassen sich dann die Koordinaten des Mittelpunktes und der Radius berechnen.

Die zweite Möglichkeit diesen Fall zu lösen ist mit einem unmarkierten Lineal und einem Zirkel da es, wie oben schon beschrieben, ein Problem der Euklidischen Geometrie ist.

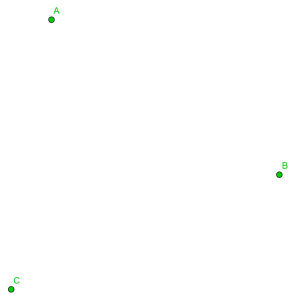


Abbildung 2: 3 Punkte auf einer Ebene

Um also einen Kreis durch diese drei Punkte zu zeichnen, muss man zuerst zweimal zwei Punkte mit einer Linie verbinden.

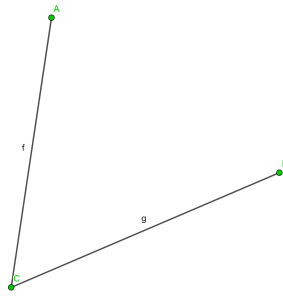


Abbildung 3: Fall PPP: Schritt 1

Danach muss man die Mittelsenkrechte der beiden Linien finden. Mit einem Lineal und einem Zirkel macht man das, in dem man von beiden Ausgangspunkten der Linie einen Kreis zeichnet, dessen Radius größer als die Hälfte der Länge der Linie ist. Daraus entstehen zwei Kreise, die sich in zwei Punkten schneiden. Verbindet man diese Punkte, bekommt die Mittelsenkrechte der Linie. In Geogebra ist es etwas einfacher.

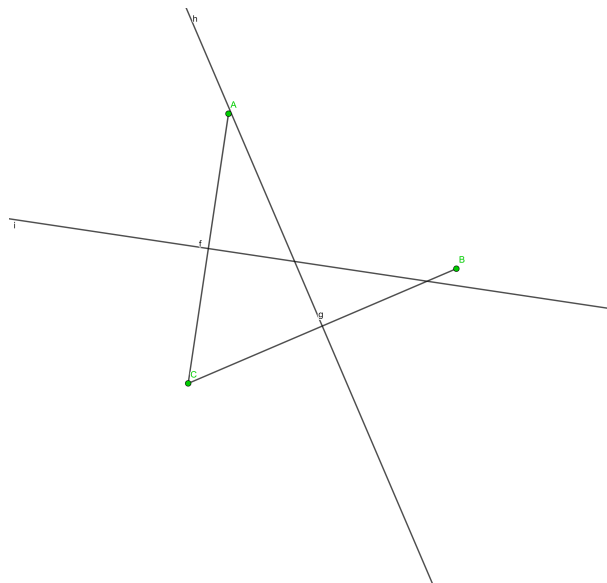


Abbildung 4: Fall PPP: Schritt 2

Der Schnittpunkt dieser Geraden ist dann der Mittelpunkt des Kreises. Jetzt muss man nur noch die Spitze des Zirkels an diesen Punkt setzen und das andere Ende des Zirkels an einen der Punkte und den Kreis zeichnen. [2]

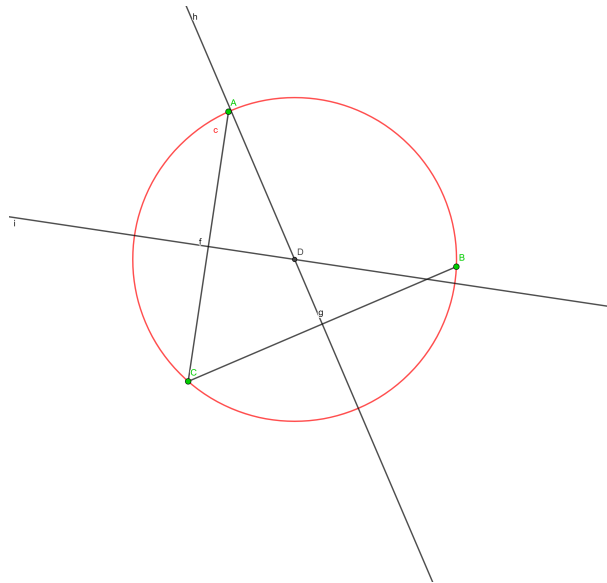


Abbildung 5: Fall PPP: Schritt 3

Um zu beweisen, dass man es auch ohne Computer lösen kann, habe ich ein Bild von der Lösung per Hand im Anhang angehängt (Abb. 32). Es ist wichtig diesen einfachen Fall genau zu verstehen da, wenn man komplexere Fälle mit Geraden und Kreisen lösen will, man nur die Berührungspunkte der Kreise auf den Objekten bestimmt und durch diese dann einen Kreis zeichnet. [2]

3.2 Fall: PPC

Um das Problem noch ein bisschen genauer zu verstehen, schauen wir uns noch einen etwas komplexeren Fall an: Zwei Punkte und einen Kreis.

Dieser Fall lässt sich ebenfalls wieder mit einem Gleichungssystem beschreiben.

$$\begin{aligned}(x_s - x_1)^2 + (y_s - y_1)^2 &= r^2 \\(x_s - x_2)^2 + (y_s - y_2)^2 &= r^2 \\(x_s - x_3)^2 + (y_s - y_3)^2 &= (r \pm r_3)^2\end{aligned}$$

Es ist fast das selbe Gleichungssystem wie bei dem Fall „PPP“, nur dass der eine Punkt um einen Radius ergänzt wird. Das entweder mit einem + oder einem -, je nach dem, ob der resultierende Kreis den Ausgangskreis einschließen soll, oder nicht. Deswegen gibt es für diesen Fall zwei Lösungen.

Schauen wir uns nun an, wie man solche Kreise per Hand konstruieren kann. Wie oben sind die Visualisierungen wieder mit GeoGebra erstellt, es gibt aber auch im Anhang ein Bild, wo ich die Lösung per Hand auf einem Papier konstruiert habe (34).



Abbildung 6: Fall PPC: Ausgangsobjekte

Fangen wir an: Im ersten Schritt muss man einen Kreis durch die beiden Punkte und den Mittelpunkt des Kreises malen. Die Anleitung dafür ist ja oben.

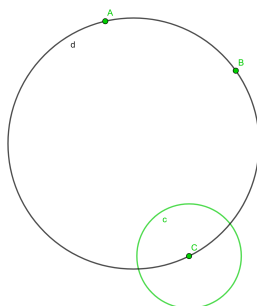


Abbildung 7: Fall PPC: Stufe 1

Daraus ergeben sich zwei Schnittpunkte zwischen dem neu gezeichneten Kreis und dem einen Ausgangskreis. Verbindet man nun die und die Ausgangspunkte mit einer Geraden, schneiden diese sich in einem Punkt g.

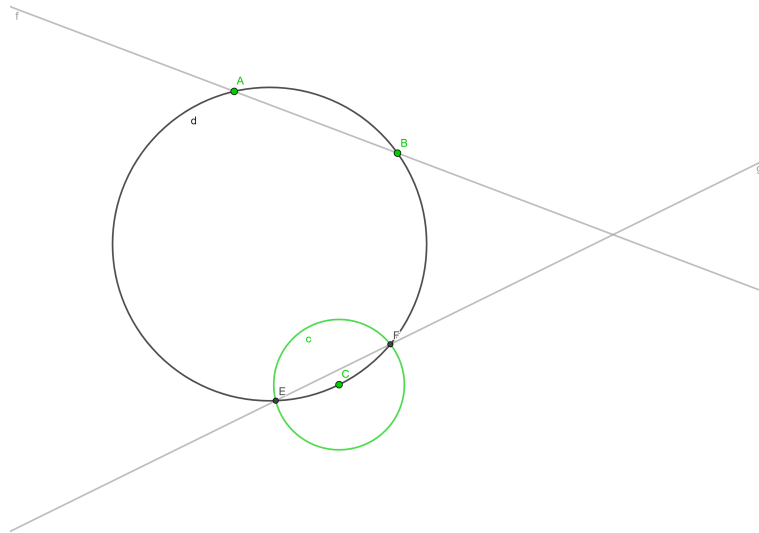


Abbildung 8: Fall PPC: Stufe 2

Von diesem Punkt aus kann man zwei Tangenten zu dem Ausgangskreis konstruieren, in dem man das Lineal durch den Punkt g gehen lässt und solange dreht, bis es nur noch einen Punkt am Kreis berührt. Das ganze kann man dann für zwei Punkte machen.

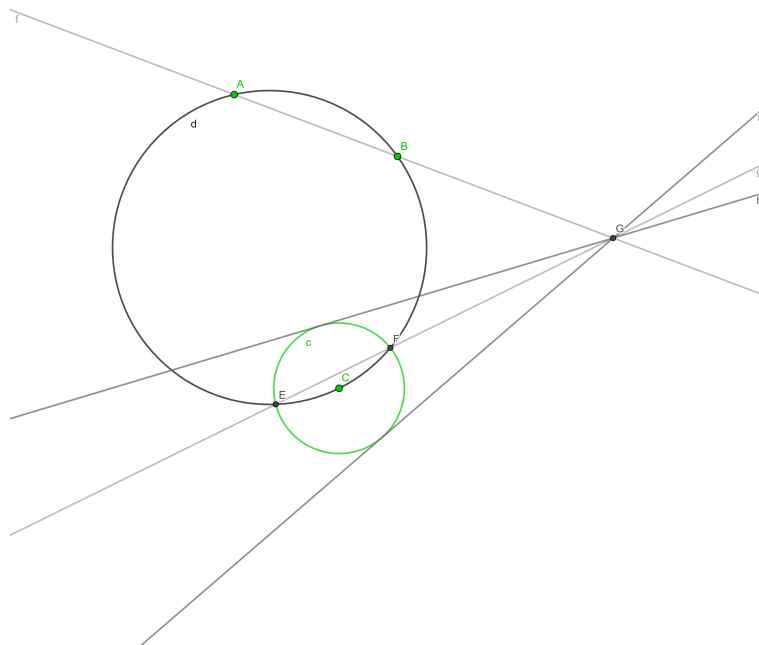


Abbildung 9: Fall PPC: Stufe 3

Daraus ergeben sich dann die beiden Punkte, wo die Berührungskreise den Ausgangskreis

berühren. Dann muss man nur noch wie oben die Punkte zu einem Kreis verbinden und man ist fertig.

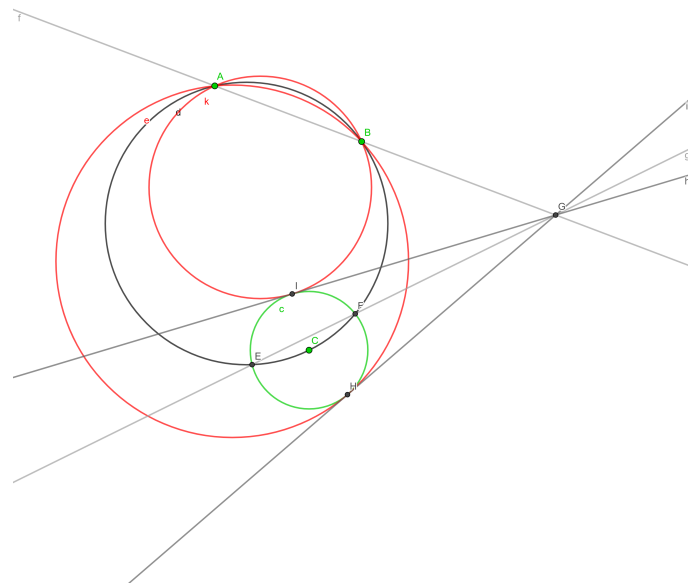


Abbildung 10: Fall PPC: Stufe 4

Wie man sieht kommt der Fall „PPP“ mehrmals in den komplexeren Fällen vor, weshalb es wichtig ist mit ihm anzufangen. [3]

3.3 Fall: PCC

Lasst uns zuletzt noch einmal den Fall „PCC“ anschauen, da wir ihn später noch brauchen werden. Insbesondere die Rekonstruktion mit Zirkel und Lineal. Natürlich lässt sich dieser Fall auch wieder algebraisch beschreiben, und zwar mit dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned}(x_s - x_1)^2 + (y_s - y_1)^2 &= r^2 \\(x_s - x_2)^2 + (y_s - y_2)^2 &= (r \pm r_2)^2 \\(x_s - x_3)^2 + (y_s - y_3)^2 &= (r \pm r_3)^2.\end{aligned}$$

Nun aber zu der Geometrischen Rekonstruktion [4]:

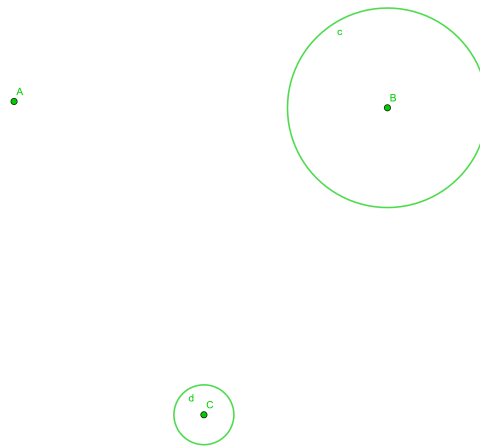


Abbildung 11: Fall PCC: Ausgangsobjekte

Wir fangen an die beiden Kreise mit Tangenten zu verbinden. Also Geraden, die beide Kreise einmal berühren aber nicht schneiden. Davon gibt es vier Stück. Danach sucht man sich eine der äußeren Tangenten aus, die die Kreise auf der gleichen Seite berühren und zeichnet die Berührungspunkte der Tangente und den den Kreisen ein. Jetzt konstruiert man einen Kreis e , der durch die Schnittpunkte und den Punkt A geht.

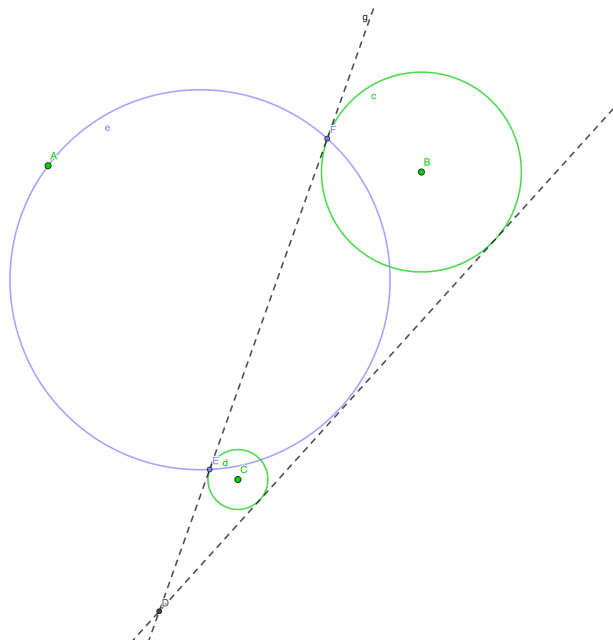


Abbildung 12: Fall PCC: Stufe 1

Nun verbindet man den Punkt A mit dem Schnittpunkt D der beiden Tangenten zu der Gerade j und Zeichnet den Punkt A' auf den Schnittpunkt des Kreises e und der gerade Kon-

struierten Gerade ein. Außerdem verbindet man die Schnittpunkte des Kreises e und einem der Ausgangskreise zu einer Geraden k .

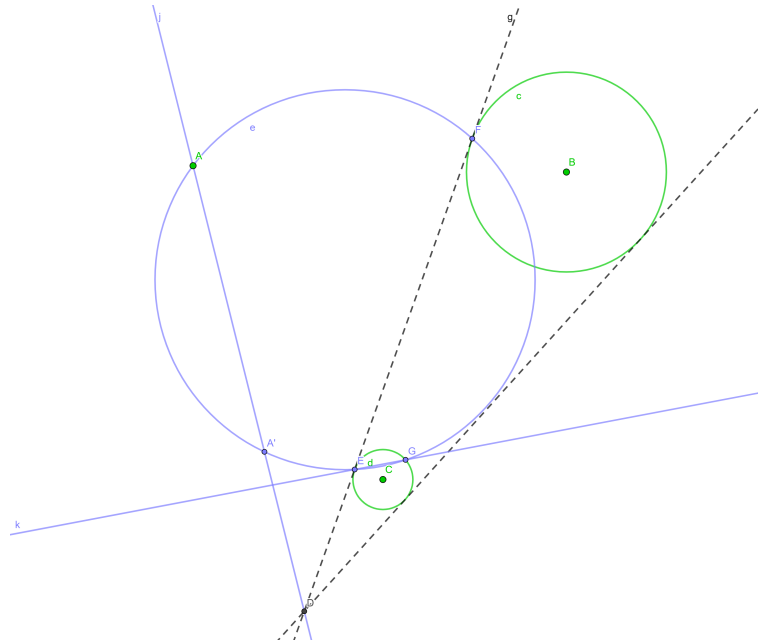


Abbildung 13: Fall PCC: Stufe 2

Als nächstes zeichnet man von dem Schnittpunkt H der beiden Geraden j und k die Tangenten zu dem Ausgangskreis ein und zeichnet die Berührungskreise durch die Berührungspunkte der Tangenten und dem Kreis und den Punkten A und A' ein.

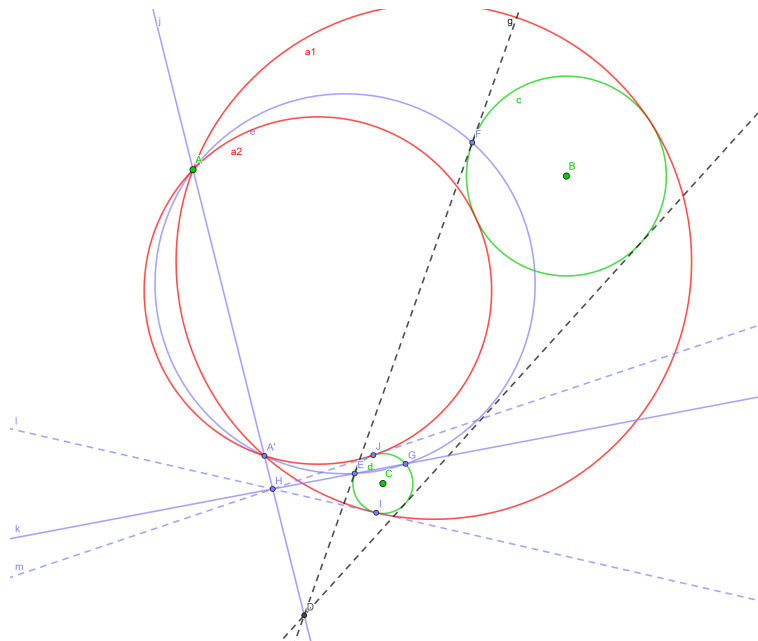


Abbildung 14: Fall PCC: Stufe 3

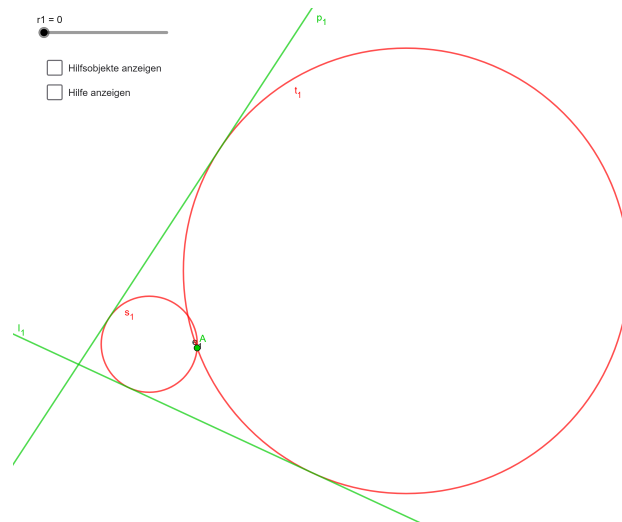
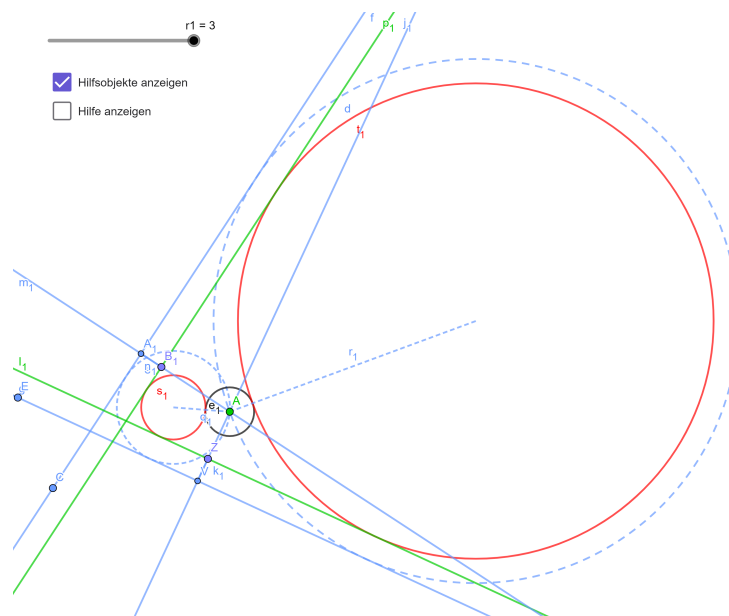
4 Lösungsansätze

Kommen wir nun zu den Lösungsansätzen für das Problem. Die erste neuzeitliche Lösung wurde 1596 von Adriaan van Roomen entwickelt, welcher versucht hatte das Problem mit Hyperbeln zu lösen. Später wurde seine Lösung noch von Isaac Newton im Jahr 1687 und von John Casey im Jahr 1881 verbessert. Wie wir schon wissen, ist es eine besondere Eigenschaft von Problemen der Euclidischen Geometrie, dass man sie nur mit einem Zirkel und einem unmarkierten Lineal konstruieren kann und Hyperbeln sind nicht Zirkel und Lineal. Also hat van Roomen noch nicht eindeutig bewiesen, ob die Kreise zur Euclidischen Geometrie gehören. Ein solcher Beweis wurde jedoch später von van Roomens Freund François Viète entwickelt, womit bewiesen war, dass man die Kreise nur mit einem Zirkel und einem Lineal konstruieren konnte. Im Laufe des 19. Jahrhunderts wurden noch viele weitere Lösungen entwickelt. Jean-Victor Poncelet löste das Problem 1811 mit harmonischen Mitten von Kreisen und dem „power of a point“ Theorem. Im Jahr 1879 löste Julius Petersen das Problem mithilfe von Kreisspiegelungen. Algebraische Methoden wurden unter anderem von René Descartes, Leonard Euler und Carl Friedrich Gauss entwickelt.

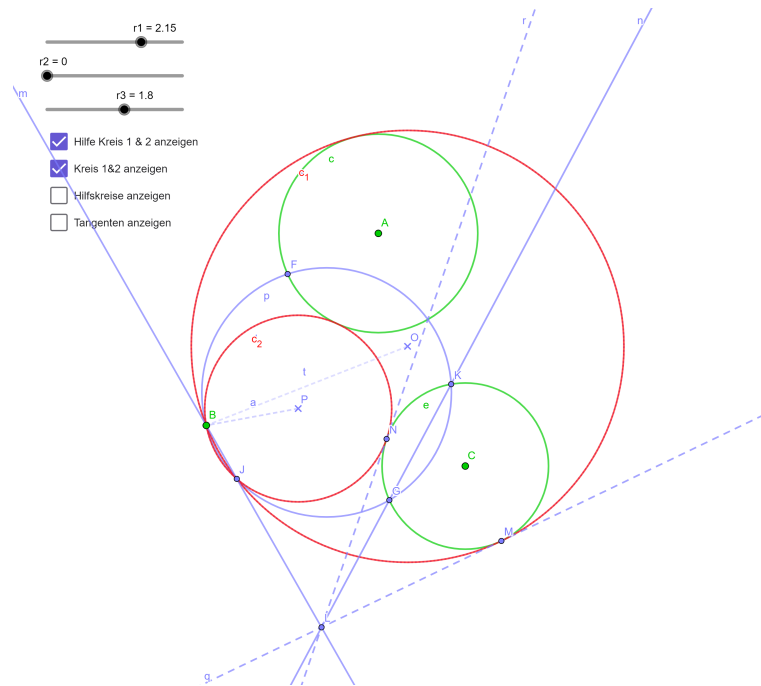
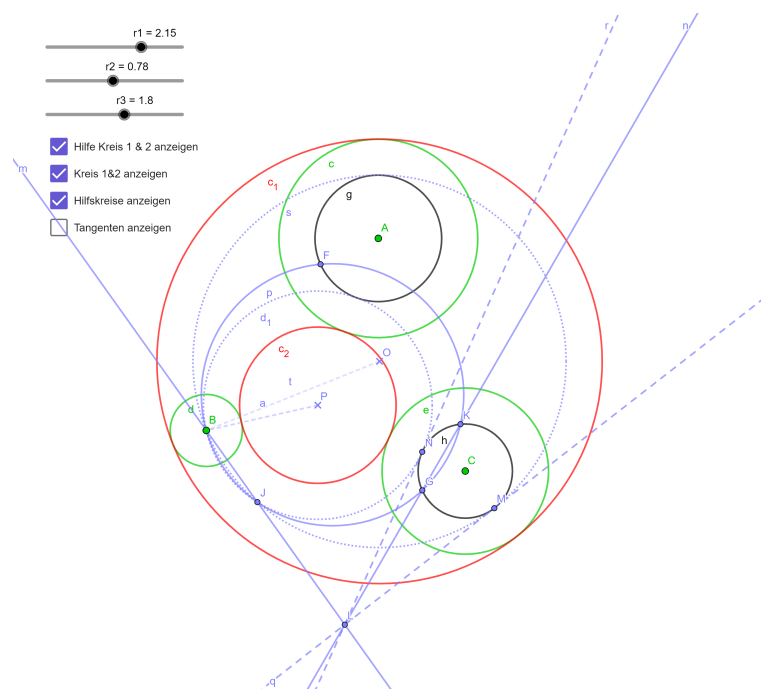
Lasst uns nun ein paar Lösungen genauer anschauen:

4.1 François Viète

François Viète hat es geschafft alle zehn unterschiedlichen Fälle nur mit einem Zirkel und einem Lineal zu lösen. Er fing an die einfachen Fälle zu lösen, so wie wir es in Kapitel 3 getan haben. Zuerst löste er den einfachsten Fall „PPP“ mit derselben Methode, wie wir es oben gemacht haben. Danach löste er alle restlichen Fälle, die keine Kreise enthalten. Dazu benutzte er unter anderem das „power of a point“ Theorem und ein Lemma (ein Hilfssatz) um den Fall PPL zu lösen und Winkelhalbierende um die Fälle LLL und PLL zu lösen. Danach widmete er sich den Fällen, die Kreise beinhalten. Zuerst schaute er sich den Fall LLC an und erkannte, dass wenn er den Kreis zu einem Punkt zusammenschrumpft und die Linien um den gleichen Radius parallel zum Punkt hinbewegt, aus einem LLC Fall einen LLP Fall machen kann, zu welchem er die Lösung ja bereits hatte. (Die Animation hierzu ist in der Geogebra Datei LLC_viete.ggb zu finden).

Abbildung 15: Der Fall LLC als LLP simplifiziert ($r_1 = 0$)Abbildung 16: LLC mit Kreis ($r > 0$)

Mithilfe dieses Prinzips löste er die anderen Fälle mit Kreisen, bis er dann endlich das generelle Problem lösen konnte. Er transformierte den CCC Fall zu einem CCP Fall und löste so diesen Fall. Hierzu gibt es auch wieder eine Geogebra Datei (CCC_viete.ggb).

Abbildung 17: CCC $\Rightarrow$ CCP ($r_2 = 0$)Abbildung 18: Der generelle Fall: CCC ($r_2 > 0$)

Hier sind nur 2 der 8 Lösungskreise abgebildet, aber die anderen lassen sich nach dem selben Prinzip konstruieren. Aus den zwei Lösungskreisen, die oben im Fall CCP abgebildet sind lassen sich insgesamt 4 Lösungskreise für den Fall CCC konstruieren, indem man die Hilfskreise nicht wie im Beispiel um r_2 verkleinert, sondern einen der Kreise um r_2 vergrößert. So lassen sich auch Kreise konstruieren, die nur einen Teil der Ausgangskreise in sich einschließen.[1]

4.2 Lösung mit Hyperbeln

Diese Lösungsmethode wurde von Adriaan van Roomen verwendet [1] (Auch Apollonios von Perge hat sich mit Hyperbeln und Kegelschnitten beschäftigt, weshalb anzunehmen ist, dass er auch versucht hat, das Problem so zu lösen. Genau weiß man das jedoch nicht, da seine Arbeit zu diesem Problem ja verloren gegangen ist.). Ähnlich wie Viète hat er das Problem vereinfacht und sich zuerst nur zwei Kreise angeschaut und versucht zu diesen Kreisen einen Kreis zu finden der beide Kreise einmal berührt. So einen Kreis findet man, in dem man zwei Kreise mit den Radien r_1 und r_2 um den Radius r_e vergrößert und an einem der Schnittpunkte der neu entstandenen Kreise einen neuen Kreis mit dem Radius r_e einzeichnet.

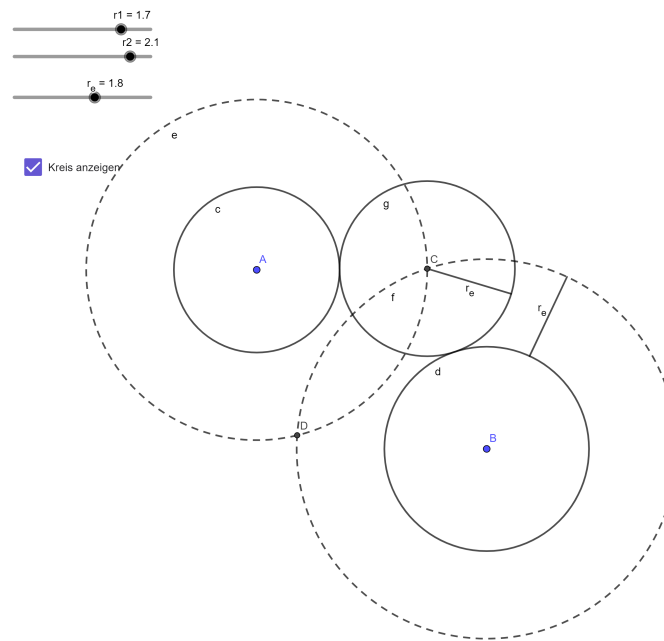


Abbildung 19: Beide Kreise wurden um r_e erweitert und am Schnittpunkt der neuen Kreise wurde ein Kreis mit dem Radius r_e eingezeichnet.

Dieser Kreis schließt keinen der beiden Kreise in sich ein. Wenn man so einen Kreis haben möchte, muss man bei einem der Kreise r_e von Radius subtrahieren, oder einen negativen Radius angeben ($r = |r_1 + r_e|$) und bei dem anderen Kreis r_e addieren.

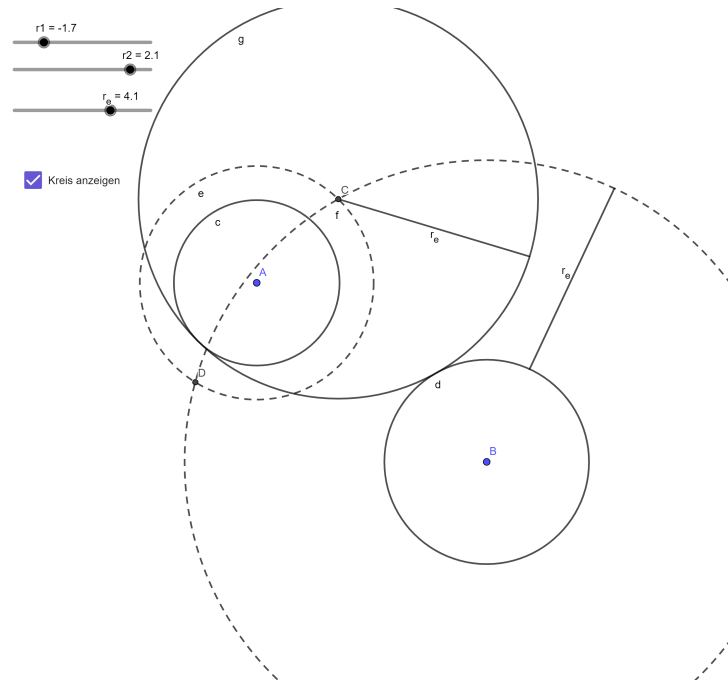


Abbildung 20: Ein Kreis wird außen berührt und ein Kreis wird innen berührt

Doch wo sind jetzt die Hyperbeln versteckt? Am besten kann man die Hyperbeln sich selber anzeigen lassen, in dem man die Geogebra Datei CC_Hyperbeln.ggb öffnet und für die Punkte C und D die Spur anstellt und r_e verändert. Wenn man das einmal mit zwei positiven Radien und einmal mit einem positiven und einem negativen Radius macht erhält man folgendes:

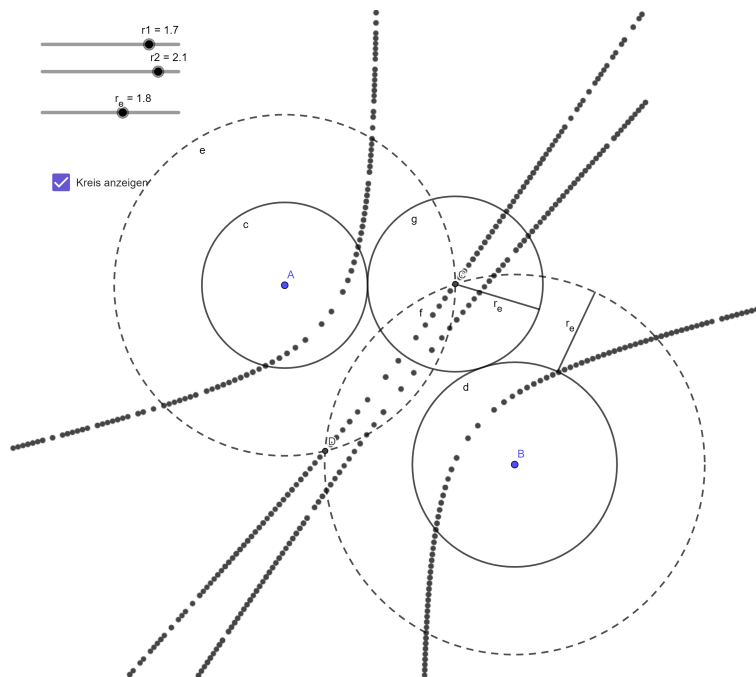


Abbildung 21: Tada: Hyperbeln

Jeder Punkt auf den Hyperbeln ist ein Mittelpunkt eines Kreises, der beide Kreise einmal

berührt. Wenn man nun einen dritten Kreis hinzufügt, kann man insgesamt 3 Hyperbel Gruppen zwischen den Kreisen erstellen. Jeder Punkt wo dann 3 dieser Hyperbeln einen Schnittpunkt haben, ist ein Mittelpunkt des Kreises, der alle 3 Kreise einmal berührt.

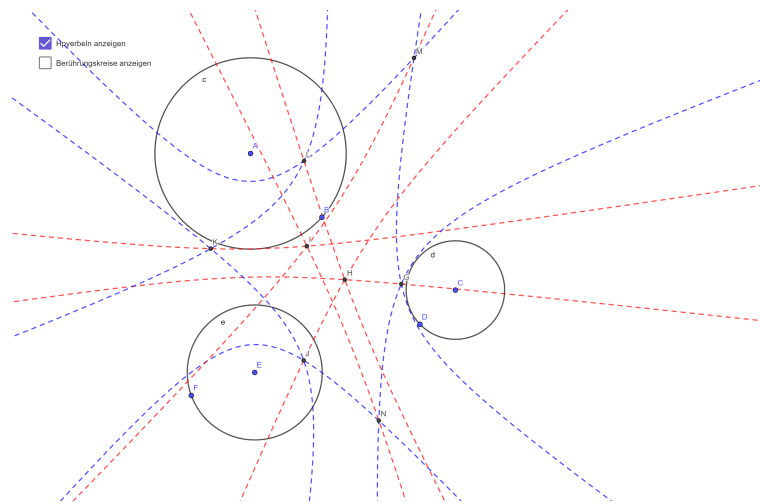


Abbildung 22: Hyperbeln zum CCC Fall

Nun kann man von diesen Schnittpunkten aus die Berührungskreise einzeichnen und bekommt alle acht Lösungen: [5]

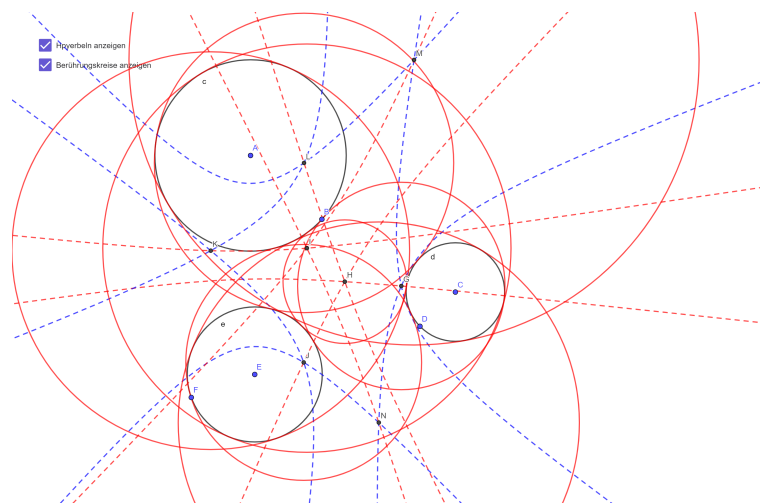


Abbildung 23: Lösungen zum CCC Fall

4.3 Algebraische Lösung

Einen Kreis kann man mit der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ beschreiben. Nun muss man nur noch die Koordinaten der Ausgangskreise von den Koordinaten des Berührungskreises subtrahieren und dasselbe mit dem Radius, wobei man den Radius entweder subtrahieren, oder addieren kann, je nach dem, ob der resultierende Kreis den Ausgangskreis in sich einschließen soll oder nicht. In der Gleichung wird das mit s_1, s_2, s_3 beschrieben, welche entweder 1 oder -1 sein können. Wenn $s = 1$ ist, wird der Ausgangskreis in dem Berührungskreis mit eingeschlossen und wenn

$s = -1$ ist nicht. Das ist das selbe Prinzip wie bei der Lösung mit den Hyperbeln in Kapitel 4.2. Wenn man das zu einem Gleichungssystem zusammenbaut kommt das dabei heraus:

$$\begin{aligned}(x_s - x_1)^2 + (y_s - y_1)^2 &= (r_s - s_1 r_1)^2 \\(x_s - x_2)^2 + (y_s - y_2)^2 &= (r_s - s_2 r_2)^2 \\(x_s - x_3)^2 + (y_s - y_3)^2 &= (r_s - s_3 r_3)^2\end{aligned}$$

Aus diesem Gleichungssystem kann man dann x_s, y_s und r_s ausrechnen. [6]

Versuchen wir mal einen Kreis aus dem Beispiel aus der Einleitung ausrechnen (Abb. 1). Und zwar den Kreis, der keinen der Ausgangskreise in sich einschließt. Das heißt, das wir s_1, s_2 & $s_3 = -1$ setzen müssen. Die Koordinaten und Radien der Kreise sind:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0.6, y_1 = 0.2, r_1 = 0.08 \\x_2 &= 0.3, y_2 = 0.5, r_2 = 0.17 \\x_3 &= 0.7, y_3 = 0.5, r_3 = 0.13\end{aligned}$$

Setzen wir das nun in die Formel ein:

$$\begin{aligned}(x_s - 0.6)^2 + (y_s - 0.2)^2 &= (r_s + 0.08)^2 \\(x_s - 0.3)^2 + (y_s - 0.5)^2 &= (r_s + 0.17)^2 \\(x_s - 0.7)^2 + (y_s - 0.5)^2 &= (r_s + 0.13)^2\end{aligned}$$

Wenn man jetzt eine der Gleichungen von den anderen beiden subtrahiert, erhält man zwei Lineare Gleichungen für x_s und y_s .

$$\begin{aligned}(2 - 1) \\0.6x_s - 0.6y_s - 0.06 &= 0.18r_s + 0.0225 \\(3 - 1) \\-0.2x_s - 0.6y_s + 0.34 &= 0.1r_s + 0.0105\end{aligned}$$

Nach x_s und y_s umgestellt ergibt das dann:

$$\begin{aligned}x_s &= 0.3r + y + 0.1375 \\y_s &= -\frac{1}{6}r - \frac{1}{3}x + 0.5491666667\end{aligned}$$

Nun kann man x_s in die Gleichung für y_s einsetzen und andersherum und man bekommt zwei Gleichungen für x_s in Abhängigkeit von r_s und y_s in Abhängigkeit von r_s .

$$\begin{aligned}x_s &= 0.1r_s + 0.515 \\y_s &= -0.2r_s + 0.3775\end{aligned}$$

Wenn man diese Gleichungen wieder in eine der oberen Gleichungen einsetzt, erhält man eine quadratische Gleichung für r_s , die sich mit der P-Q Formel lösen lässt.

$$0.05r_s^2 - 0.08799999998r_s + 0.03873125 = r_s^2 + 0.16r_s + 0.0064$$

$$\rightarrow r_s = -0.3565130717078 \vee r_s = 0.09546044012499$$

Jetzt muss man nur noch einen der beiden Radien in die Gleichungen für x_s und y_s von oben einsetzen und man ist fertig.

$$x_s = 0.1 \cdot 0.09546044012499 + 0.515$$

$$x_s = 0.5245460440125$$

$$y_s = -0.2 \cdot 0.09546044012499 + 0.3775$$

$$y_s = 0.35840791197$$

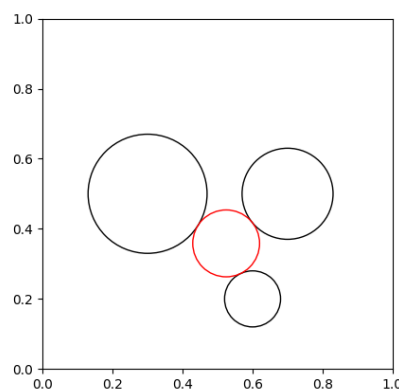


Abbildung 24: Lösungskreis CCC

5 Erweiterung in die dritte Dimension

Nachdem ich viele Fälle des Problems in Geogebra nachgebaut habe, habe ich mich gefragt, ob man das Problem auch in die dritte Dimension erweitern kann. Also genauer gesagt, ob man Kugeln finden kann, die zu vier Objekten, welche entweder ein Punkt (P), eine Linie (L), eine Ebene (E) oder eine Kugel (S), oder zu einer Kombination von denen Tangential steht. Vier Objekte, weil es mit nur drei Objekten keine finite Anzahl an Lösungen gibt, genau, wie es bei zwei Objekten in 2D der Fall ist.

Um diese Frage zu beantworten habe ich in Geogebra eine 3D Arbeitsfläche geöffnet (auf Papier ist das ja ein bisschen schwierig), vier Punkte in das Koordinatensystem gesetzt und versucht es so zu Lösen, wie den PPP Fall in 2D. Um diesen Fall in 2D zu lösen, benutzt man ja Mittelsenkrechte zwischen den Punkten um den Mittelpunkt des Kreises herauszufinden. In 3D Funktioniert das so ähnlich. Hier gibt es Halbierungsebenen und wenn man von drei

Punktpaaren die Halbierungsebenen bildet, ist der Schnittpunkt der 3 Ebenen der Mittelpunkt der Kugel, die durch alle Punkte geht.

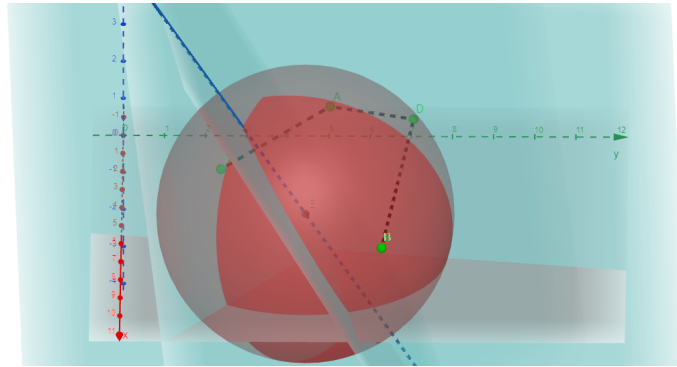


Abbildung 25: Eine Kugel durch 4 Punkte

Da es in Geogebra noch kein Werkzeug für eine Kugel durch vier Punkte standardmäßig gibt, hab ich aus der Datei ein Werkzeug erstellt, um es für die schwereren Fälle zu benutzen. Das Werkzeug gibt es zum Herunterladen auf meiner Webseite (<http://tom.reinisch.net/apollonios>).

5.1 Fall: PPPS

Als nächstes hab ich noch versucht einen der Punkte zu einer Kugel zu machen und diesen Fall zu lösen. Nach ein bisschen herumprobieren hab ich es geschafft in Geogebra zwei Kugeln zu konstruieren, die die drei Punkte und die Kugel berührt.

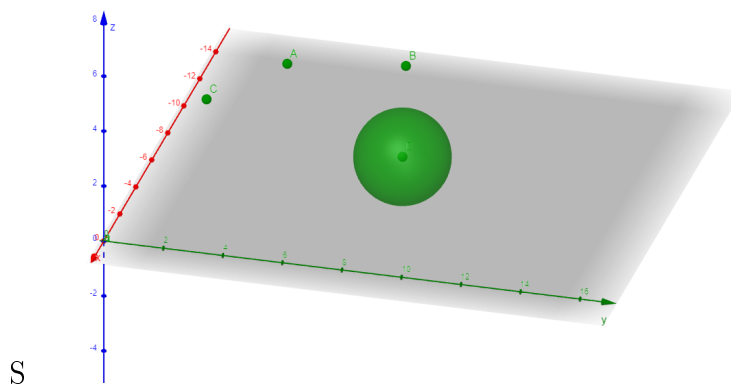


Abbildung 26: Eine Kugel und 3 Punkte

Zuerst konstruiert man eine Kugel, die durch die drei Punkte und den Mittelpunkt der einen Kugel geht. Daraus ergibt sich dann ein Kreis, wo die Kugel sich mit der Ausgangskugel schneidet.

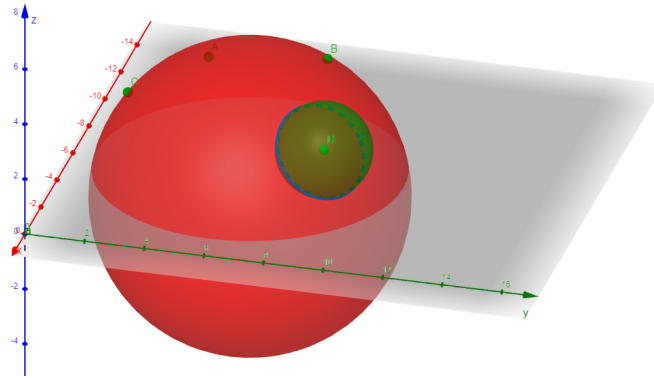


Abbildung 27: Fall PPS: Stufe 1

Nun muss man zwei Ebenen konstruieren. Die eine Ebene geht durch die drei Ausgangspunkte und die andere durch den Schnittkreis.

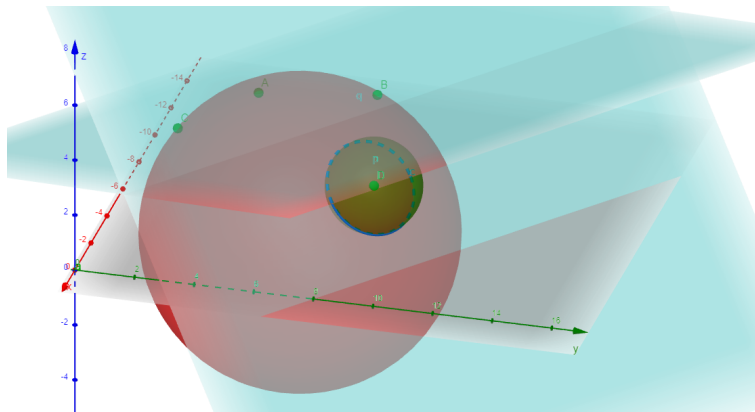


Abbildung 28: Fall PPS: Stufe 2

Als nächstes konstruiert man eine Normalebene aus der Schnittlinie der beiden oben konstruierten Ebenen und dem Mittelpunkt der Ausgangskugel.

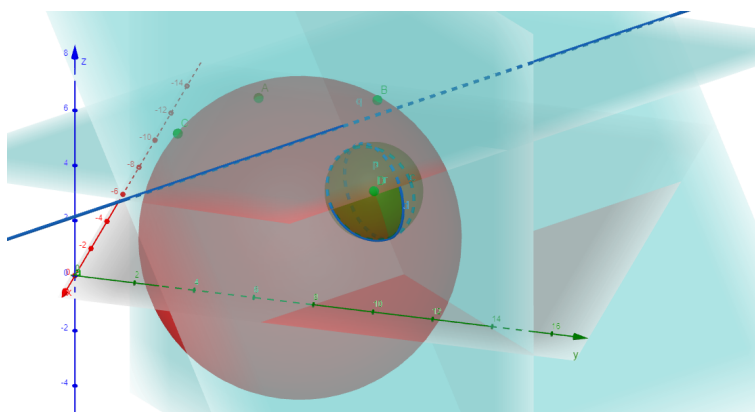


Abbildung 29: Fall PPS: Stufe 3

Von dem Schnittpunkt der Linie und der Normalebene kann man nun Tangenten zu dem Schnittkreis der Normalebene konstruieren.

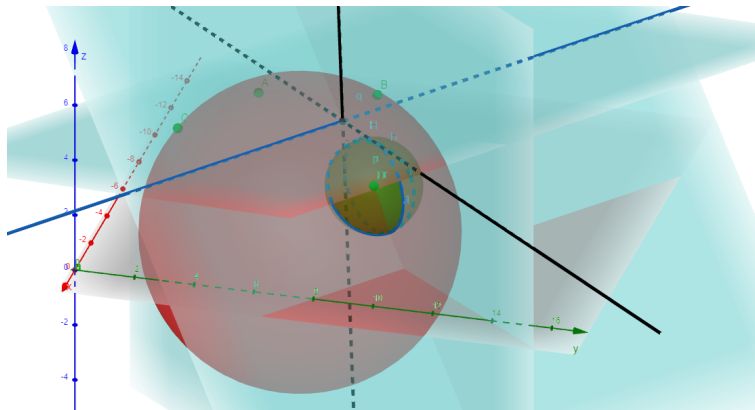


Abbildung 30: Fall PPS: Stufe 4

Die Berührungspunkte der Tangenten auf der Kugel sind dann auch die Berührungspunkte der Berührungskugeln und man kann die beiden Lösungen konstruieren.

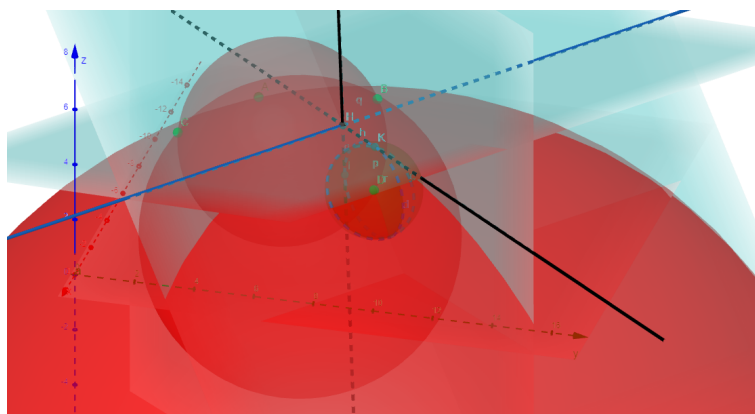


Abbildung 31: Fall PPS: Stufe 5

5.2 Algebraische Lösung

Wenn Sie die algebraische Lösung zu diesem Problem sehen wollen, Rasmus Fonseca hat eine Anleitung dafür erstellt. Diese Anleitung findet sich hier [7]. Der einzige Unterschied zu der 2D Version besteht darin, dass es vier Gleichungen gibt, da es ja auch vier Objekte gibt und die linke Seite der Gleichungen wurde um ein z_s ergänzt. Die Lösungsmethoden hierfür ist fast genau die selbe, wie in 2D (Kapitel 4.3).

5.3 Lösungsmöglichkeiten

Schauen wir uns nun noch einmal die Anzahl der Lösungsmöglichkeiten für den Fall „SSSS“ an. Da die Algebraische Lösung ebenfalls ein s_1 bis s_4 enthält, kann man dazu wieder alle Möglichkeiten sich erdenken. Es gibt wieder eine Möglichkeit wo alle $s = -1$ sind. Vier Möglichkeiten

wo ein $s = 1$ ist und drei $s = -1$. Sechs Möglichkeiten wo zwei $s = -1$ und zwei $s = 1$ sind. Vier Möglichkeiten wo ein $s = -1$ und drei $s = 1$ sind und eine Möglichkeit wo alle $s = 1$ sind. Daraus ergibt sich dann $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$. Es gibt also 16 verschiedene Möglichkeiten. Als ich diese Zahlen gesehen habe, haben sie mich an etwas erinnert. Wenn man sie mit den Lösungsmöglichkeiten für den 2D Fall untereinander schreibt, wird es klarer.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

Es sind die dritte und vierte Reihe des Pascalschen Dreiecks.

Das bedeutet, dass man wenn man die Anzahl der Lösungsmöglichkeiten für die vierte Dimension haben möchte, einfach eine Zeile tiefer in Pascalschen Dreieck schauen muss und für die fünfte Dimension noch eine weiter und so weiter. Wenn man einfach nur die Anzahl der Lösungsmöglichkeiten haben möchte, ist die Formel dafür sehr simpel:

$$A(x) = 2^{x+1}$$

Wobei x für die Dimension steht. Die Formel kommt daher, dass man für jeden Kreis zwei Möglichkeiten hat, ihn zu berühren (deshalb 2 als Basis) und $x + 1$ kommt daher, dass es immer ein Objekt mehr als die Dimension gibt, damit es eine finite Anzahl an Lösungen gibt, wie oben besprochen.

6 Schluss

Wenn man sich noch mehr mit dem Problem des Apollonios beschäftigen möchte, könnte man die dritte Dimension weiter untersuchen und die Lösungen vervollständigen. Auch eine Tabelle mit den Anzahlen aller Lösungsmöglichkeiten der Fälle in 3D fände ich interessant. Dann könnte man sich auch noch weitere Dimensionen anschauen und eine Dimension hinzufügen und sich das Problem in 4D anschauen. Die Arbeit an dieser Facharbeit hat mir schon Spaß gemacht, da ich mich noch nie mit etwas ähnlichem beschäftigt habe. Ich habe die Grundlagen von Geogebra gelernt und die Euklidische Geometrie kennengelernt. Was mich jedoch etwas gestört hat ist, dass es eine wirkliche Anwendung in der realen Welt von diesem Problem gibt, was es für mich irgendwie ein wenig sinnlos macht. Nichtsdestotrotz hat es Spaß gemacht sich damit zu beschäftigen und es hilft auch dabei andere geometrische Probleme zu lösen.

7 Anhang

Her sind noch zwei Bilder, in denen ich versucht habe per Hand ein paar Fälle des Apollonios Problem zu lösen. Für diese Konstruktionen habe ich meinen Zirkel, einen Stift und ein Buch als Lineal verwendet, weil dieses im Vergleich zu einem Geodreieck oder Lineal keine Markierungen hat. Ich hab mich auf die simpleren Fälle beschränkt da, wie man beim Fall PPC sieht, es schnell sehr Chaotisch wird.

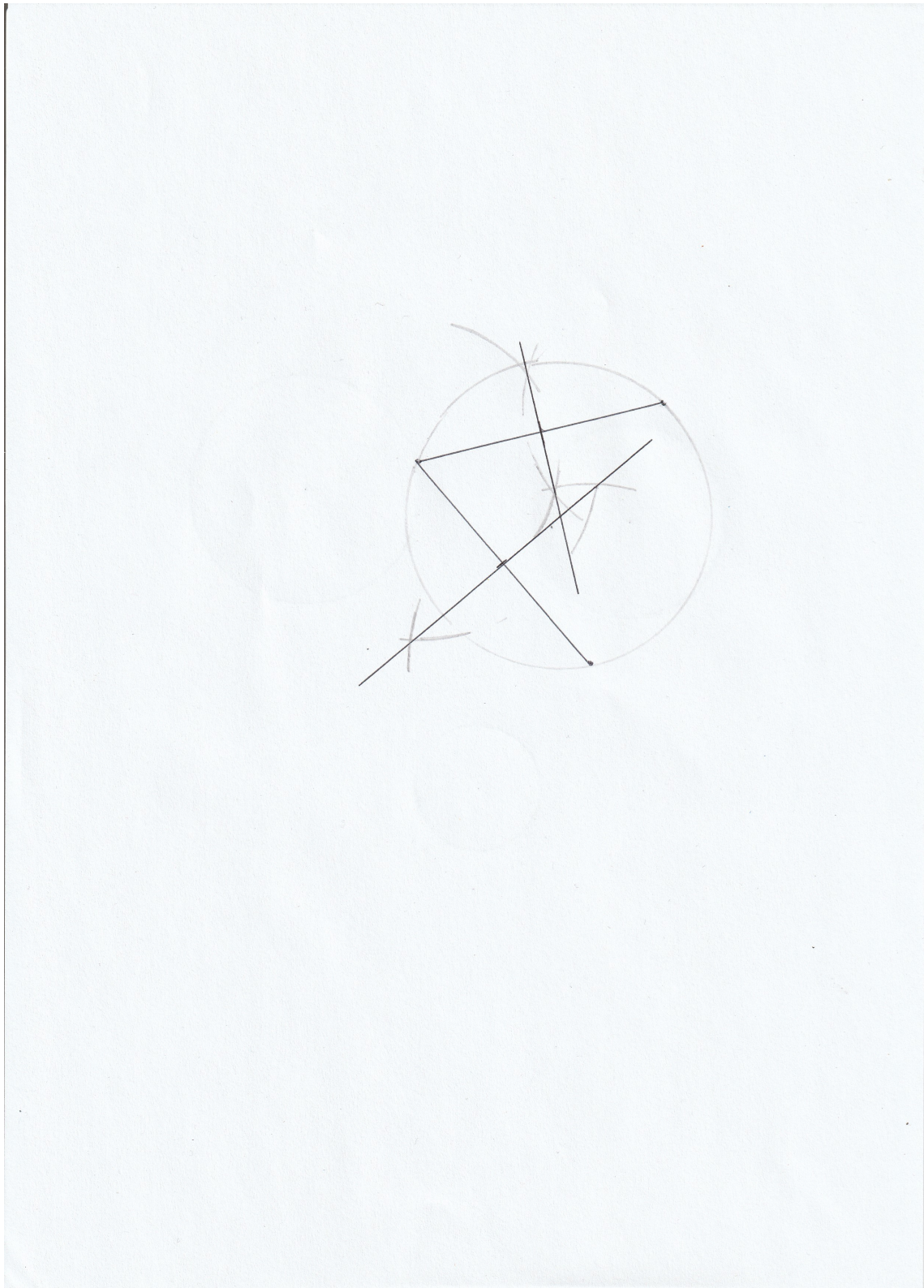


Abbildung 32: Fall PPP per Hand

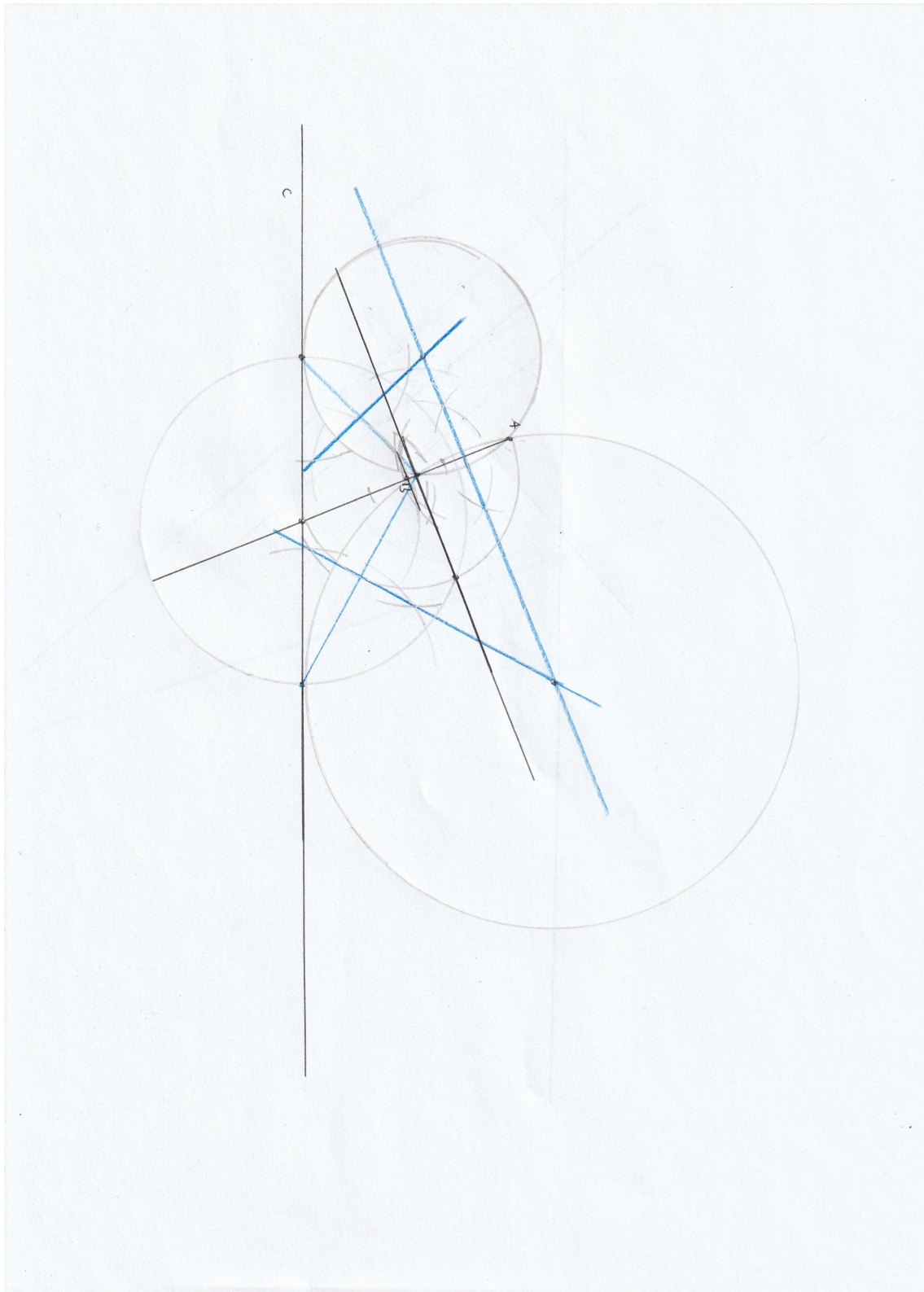


Abbildung 33: Fall PPL per Hand

[8]

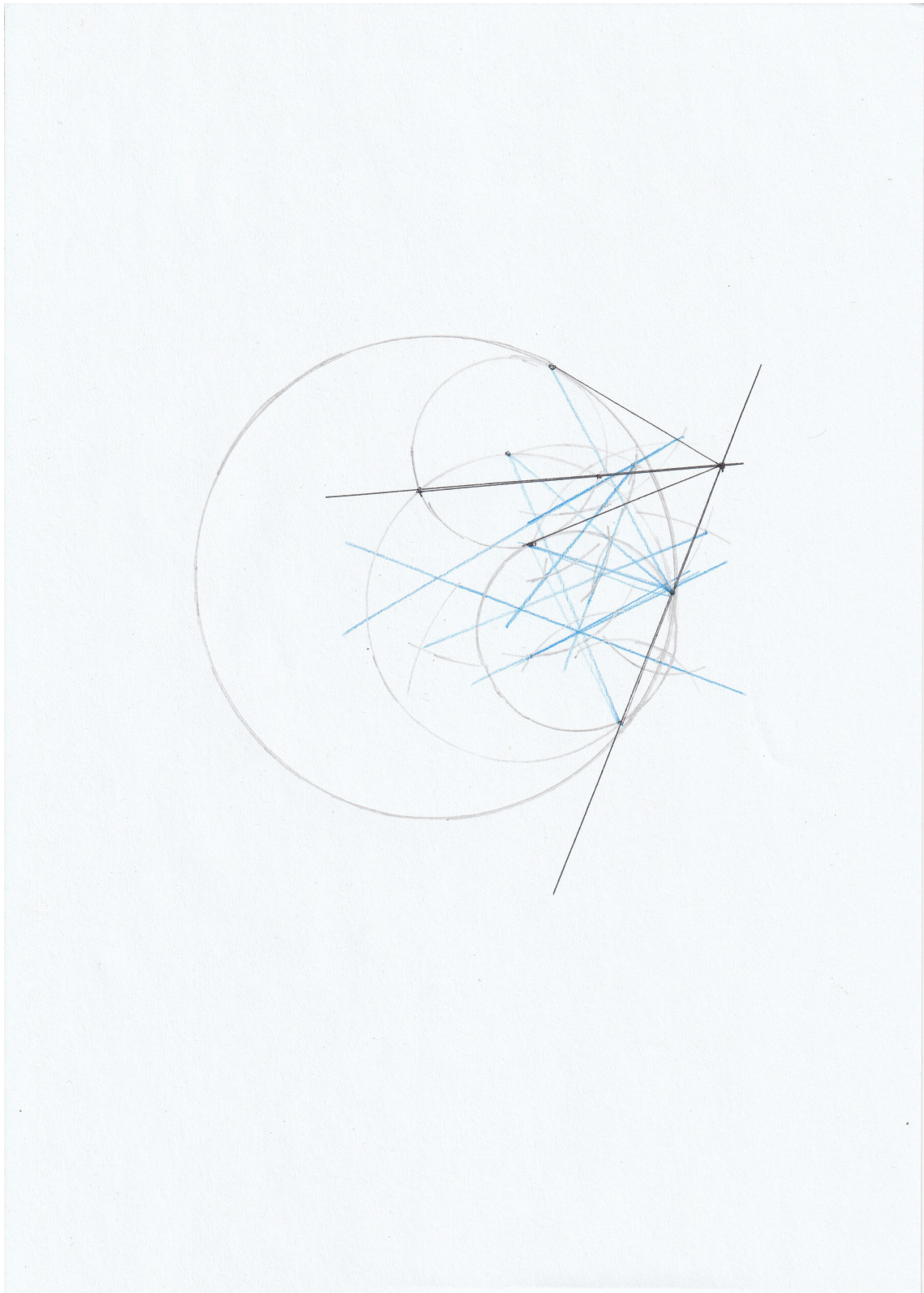


Abbildung 34: Fall PPC per Hand

Literatur

- [1] wikipedia. Problem of apollonius. <https://en.wikipedia.org/>, 2024.
- [2] mathsisfun. Circle touching 3 points. www.mathsisfun.com/, 2024.
- [3] Alexander Bogomolny. Ppc: Apollonius' problem with two points and a circle. cut-the-knot.org, 2024.
- [4] Alexander Bogomolny. Pcc: Apollonius' problem with two circles and a point. cut-the-knot.de, 2024.
- [5] Justin Brown. How to draw tangent circles using cones. youtube.com, 2021.
- [6] wolfram. Apollonius' problem. wolfram.com, February 2024.
- [7] Rasmus Fonesca. A step-by-step description of how to solve the problem of apollonius in 3d. hjemmesider.diku.dk, 2011.
- [8] Alexander Bogomolny. Ppl: Apollonius' problem with two points and a line. cut-the-knot.org, 2024.
- [9] H. S. M. Coxeter. The problem of apollonius. *The American Mathematical Monthly*, 1968.
- [10] Paris Pamfilos. Apollonius problem. users.math.uoc.gr, November 2021.